{Θέματα επιχειρησιακών ερευνών}

Άσκηση 6 φυλ 2

$\max \prod_{i=1}^{n} y_i \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = q$ πρόβλημα του σακιδίου με πολλά

$f_1(x_1) = \max_{y_1 = x_1} y_1$

αναδρομική σχέση: $f_i(x_i) = \max_{0 \le y_i \le x_i} \{ y_i \, f_{i-1}(x_i - y_i) \}$ $i = 1, \dots n$

$i=1$ $f_1(x_1) = x_1$

$i=2$ $f_2(x_2) = \max_{0 \le y_2 \le x_2} y_2 f_1(x_2 - y_2) = \max_{0 \le y_2 \le x_2} y_2 (x_2 - y_2)$

$$\frac{\partial}{\partial y_2} y_1 (x_2 - y_2) = x_2 - 2y_2$$

$$x_2 - 2y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{x_2}{2}$$

$$y_1 = x_1 = x_2 - \frac{x_2}{2} = \frac{x_2}{2} \quad , \; y_1 = y_2 = \frac{x_2}{2}$$

$i=3$ $f_3(x_3) = \max_{0 \le y_3 \le x_3} y_3 f_2(x_3 - y_3) = \max_{0 \le y_3 \le x_3} \frac{y_3 (x_3 - y_3)^2}{4}$

$$f_2(x_2) = \frac{x_2}{2}\left(x_2 - \frac{x_2}{2}\right) = \frac{(x_2)^2}{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_3} y_3 \left(\frac{x_3 - y_3}{2}\right)^2 = x_3^2 + 3y_3^2 - 4x_3 y_3$$

$$x_3^2 + 3y_3^2 - 4x_3y_3 = 0 \qquad y_3 = x_3 \qquad y_3 = \frac{x_3}{8}$$

$$x_2 = x_3 - y_3 = \frac{2}{3} x_3$$

$$y_2 = \frac{x_2}{2} = \frac{\frac{2}{3}x_3}{2} = \frac{x_3}{2} \Rightarrow y_i = \frac{x_3}{3}$$

$$f_3(x_3) = \frac{x_3}{3}\left(\frac{x_3 - \frac{x_3}{3}}{2}\right)^2 = \frac{x_3^3}{9}$$

$$y_i = \frac{x_i}{i} \quad f_i(x_i) = \left(\frac{x_i}{i}\right)^i$$

$$f_{i+1}(x_{i+1}) = \max_{0 \le y_{i+1} \le x_{i+1}} \{ y_{i+1} f_i(x_{i+1} - y_{i+1}) \}$$

$$y_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{i+1}$$

$$f_N(q) = \left(\frac{q}{n}\right)^n = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right)^n$$

$$\prod_{i=1}^{n} y_i \le \max \prod_{i=1}^{n} y_i$$

$$\prod_{i=1}^{n} y_i \le \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right)^n \Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} y_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}$$

□

Γενίκευση δυναμικού προγραμματισμού (με στοχαστική παράμετρο)

1   2   …   N − 1   N ← περίοδοι

0   1   2   …   N − 1   N ← χρον. στιγμές

λόγω της στοχαστικής τιμής θα έχω εκκρεμείς παραγγελίες

γνωρίζοντας το διαθέσιμο απόθεμα για κάθε χρονική στιγμή να βρίσκουμε την ποσότητα που θα παραγγείλουμε.

Σχόλιο

Σχόλιο

- x_k: το διαθέσιμο απόθεμα στην αρχή της περιόδου k
- u_k: η ποσότητα που παραγγέλνονται και είναι διαθέσιμη άμεσα στην αρχή της περιόδου k.
- w_k: η ζήτηση στη διάρκεια της περιόδου k με συγκεκριμένη κατανομή. $w_0, w_1, \dots, w_{N-1}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

κατάστασης: $x_{k+1} = x_k + u_k - w_k$

- Το κόστος $r(x_k)$: κόστος διατήρησης ή έλλειψης
- Το κόστος αγοράς $c u_k$ (c: μοναδιαίο κόστος αγοράς)

$$E\left(R(x_n) \sum_{i=0}^{n-1} \{ r(x_k) + c u_k \}\right)$$: E: μέση τιμή → θέλω να το ελαχιστοποιήσω κάτω από τους περιορισμούς

• <u>πολιτική (π)</u> : Προσπαθώ να βρω συναρτήσεις της μορφής

$\pi = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{N-1})$

$\downarrow \; u_0 \quad \downarrow \; u_1 \quad \downarrow \; u_{N-1}$

• $$J_\pi(x_0) = E\left(R(x_N) + \sum_{k=0}^{N+1} (r(x_k) + c\,\mu_k(x_k))\right)$$

ορίζω την συνάρτηση ως εξής: $\mu_k(x_k) = \begin{cases} S_k - x_k, & \text{αν } y_k < S_k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

→ Διακριτές καταστάσεις

$\boxed{x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \omega_k)}$

→ Ανεξάρτητες τυχαίες παράμετροι ω_k

→ περιορισμός $u_k \in U_k(x_k)$

• <u>προσθετικό κόστος</u>: $E\left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, \omega_k) \right\}$

• <u>βελτιστοποίηση</u>:

→ Αρχική κατάσταση x_0

$\pi = (\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{N-1})$

$x_{k+1} = f_k(x_k, \mu(x_k), \omega_k)$

$$J_\pi(x_0) = \underset{\omega_k}{E}\left\{ g_N(x_k) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, \mu(x_k), \omega_k) \right\}$$

$k = 0, 1, \ldots N-1$

$J_{\pi^*}(x_0) = \min_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_0)$ → όλες οι πολιτικές

$J^*(x_0) = \min_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_0)$

$$\boxed{J_N(x_N) = 0}$$

$c\,u_{N-1} + E(R x_N)$ για την τελευταία περίοδο

$c\,u_{N-1} + E R(x_{N-1} + u_{N-1} - \omega_{N-1})$

$$J_{N-1}(x_{N-1}) = r(x_{N-1}) + \min_{u_{N-1}\geq 0} \{ c u_{N-1} + \underset{w_{N-1}}{E}\{ R(x_{N-1}+u_{N-1}-w_{N-1}) \} \}$$

$$J_{N-2}(x_{N-2}) = r(x_{N-2}) + \min_{u_{N-2}\geq 0}\{ c u_{N-2} + \underset{w_{N-2}}{E}(J_{N-1}(x_{N-1}))\}$$

$$J_k(x_k) = r(x_k) + \min_{u_k\geq 0} \{ c u_k + \underset{w_k}{E}\{ J_{k+1}(x_k+u_k-w_k)\}\}$$

βέλτιστο $J_0(x_0)$

<u>ορίζοντας σχεδιασμού</u> : 3 περίοδοι αρχικό απόθεμα 0

u_k, w_k : μη αρνητικοί ακέραιοι

$x_{k+1} = \max\{0, x_k+u_k-w_k\}$

μέγιστο επίπεδο απόθεμα 2 μονάδες : $x_k+u_k \leq 2$

κόστος διατήρησης $(x_k+u_k-w_k)^2$

κόστος αγοράς : 1 € / μονάδα προϊόντος

$g_k(x_k,u_k,w_k) = u_k + (x_k+u_k-w_k)^2$, $g_N(x_N)=0$

$\underbrace{P(w_k=0)}_{p_0} = 0,1$ $\underbrace{P(w_k=1)}_{p_1} = 0$ $\underbrace{P(w_k=2)}_{p_2} = 0,2$

$$J_k(x_k) = \min_{\substack{0\leq u_k\leq 2-x_k \\ u_k=0,1,2}} \underset{w_k}{E}\left(u_k + (x_k+u_k-w_k)^2 + J_{k+1}(\max\{0, x_k+u_k-w_k\})\right)$$

<u>χρονική στιγμή 2</u> $J_2(0) = \min_{u_2=0,1,2} \underset{w_2}{E}(u_2 + (u_2-w_2)^2)$

$$= \min_{u_2=0,1,2}\{(u_2+(u_2-0)^2)p_0 + (u_2+(u_2-1)^2)p_1 + (u_2+(u_2-2)^2)p_2\}$$

$$= \min\{1,5,\ 1,3,\ 3,1\} = 1,3$$

$\mu_2^*(0) = 1$ (βέλτιστο)

$$J_2(1) = \min_{u_2=0,1} \underset{w_2}{E}(u_2 + (1+u_2-w_2)^2)$$

$$= \min_{u_2=0,1} (u_2 + (1+u_2-0)^2 p_0 + (u_2+(1+u_2-1)^2)p_1 + (u_2+(1+u_2-2)^2)p_2$$

$$= \min_{u_2=0,1}\{u_2 + 0,1(1+u_2)^2 + 0,7u_2^2 + 0,2(u_2-1)^2\}$$

$$= \min\{0,3,\ 2,1\}$$ $\mu_2^*(1) = 0$

$x_2 = 0$

$$J_2(2) = \underset{u_2}{E}\,(2-w_2)^2 = (2-0)^2 P_0 + (2-1)^2 P_1 + (2-2)^2 P_2 = 1,1$$

$$\mu_2^*(2) = 0$$

Περίοδο 1

$J_1(x_1)$

$$J_1(0) = \min_{u_1=0,1,2} E\left(u_1 + (u_1-w_1)^2\right) + J_2\left(\max(0, u_1-w_1)\right)$$

$$= \min_{u_1=0,1,2}\Big(u_1 + (u_1-0)^2 + J_2(\max\{0, (u_1-0)\})P_0 + (u_1 + (u_1-1)^2 +$$

$$+ J_2(\max\{0, u_1-1\})P_1\Big) + (u_1 + (u_1-2)^2 + J_1(\max\{0, u_1-2\}))P_2$$

$$= \min_{u_1=0,1,2}\Big(u_1 + [u_1^2 + J_2(\max(0,u_1))P_0 + ((u_1-1)^2 + J_2(\max\{0, u_1-1\})P_1$$

$$+ ((u_1-2)^2 + J_2(\max\{0, u_2-2\})P_3\}$$

$$= \min\{2,8\ ,\ 2,5\ ,\ 3,68\} = 2,5$$

$$\mu_1^*(0) = 1$$

$$J_1(1) = \min_{u_1=0,1}\ \underset{w_1}{E}\left(u_1 + (1+u_1-w_1)^2 + J_2(\max\{0, 1+u_1-w_1\}\right)$$

$$= \min\{1,2\ ,\ 2,68\} = 1,2 \qquad \mu_1^*(1) = 0$$

$$J_1(2) = \min \underset{w_1}{E}\left((1-w_1)^2 + J_2(\max\{0, 1-w_1\}\right) = 1,68$$

$$\mu_1^*(2) = 0$$

$$J_0(0) = \min_{u_0=0,1,2}\ \underset{w_0}{E}\left(u_0 + (u_0-w_0)^2 + J_1(\max\{0, u_0-w_0\}\right)$$

$$= \min\{4\ ,\ 3,67\ ,\ 5,18\} = 3,67 \qquad \mu_0^*(0) = 1$$

Βέλτιστο κόστος λειτουργίας 3,67

Μας είπε ότι θα τελειώσαμε με Μηδενικό απόθεμα αν δεν μας το οριζε θα έπρεπε να βρω $J_0(1)$, $J_0(2)$

Σχόλιο

Άσκηση

Σκάκι

Έχουμε ένα παίκτη που θα παίζει 2 παιχνίδια στο σκάκι. Θέλει να μεγιστοποιήσει την επιτυχία του.
Έχουμε 2 αποτελέσματα.

Νίκη: δίνει 1 βαθμό νικητή και 0 στον ηττημένο

Ισοπαλία: δίνει $\frac{1}{2}$ βαθμό σε κάθε παίκτη

Αν είναι ισοπαλία, τότε οι παίκτες συνεχίζουν να παίζουν μέχρι την 1η νίκη.
Μπορεί να επιλέξει μεταξύ 2 στρατηγικών παιχνιδιού.
Είναι ανεξάρτητος από ό,τι έχει επιλέξει στο προηγούμενο παιχνίδι.

Στρατηγική Α: φέρνει ισοπαλία με πιθανότητα P_d ή χάνει $1-P_d$

Στρατηγική Β: κερδίζει με πιθανότητα P_w ή χάνει $1-P_w$

Λύση

Ορίζουμε **σκορ**: πόντοι παίκτη − πόντοι αντιπάλου

αναδρομική σχέση

η κατάσταση στην οποία βρίσκομαι

βρίσκομαι με συν 1 πόντο

$$J_k(x_k) = \max\{P_d J_{k+1}(x_k) + (1-P_d) J_{k+1}(x_k - 1),\ P_w J_{k+1}(x_k+1) + (1-P_w) J_{k+1}(x_k - 1)\}$$

σκορ

βρίσκομαι με πλην 1 πόντο

$$J_N(x_N) = \begin{cases} 1, & x_N > 0 \Rightarrow \text{κερδίζω} \\ P_\omega, & x_N = 0 \Rightarrow \text{ισοπαλία} \\ 0, & x_N < 0 \end{cases}$$

Αν $P_d > P_\omega$

$$J_{N-1}(x_{N-1}) = \max\{ d J_N(x_{N-1}) + (1-P_d) J_N(x_{N-1}-1), \; P_\omega J_N(x_{N-1}+1) + (1-P_\omega) J_N(x_{N-1}-1)\} = 1$$

$J_{N-1}(x_{N-1}) = 1 \qquad x_{N-1} > 1$

$$J_{N-1}(1) = \max\{P_d J_N(1) + (1-P_d) J_N(0), P_\omega J_N(2) + (1-P_\omega) J_N(1)\}$$
$$= \max\{P_d + (1-P_d)P_\omega, P_\omega + (1-P_\omega)P_\omega\}$$
$$= P_d + (1-P_d)P_\omega \quad \text{αν } P_d > P_\omega \quad \boxed{\text{επιλέξω τον A}}$$

$$J_{N-1}(0) = \max\{P_d J_N(-1) + (1-P_d) J_N(-2), P_\omega J_N(0) + (1-P_\omega) J_N(-2)\} = \max\{0, P_\omega^2\} = P_\omega^2$$

$\boxed{\text{Επιλέξω τον B}}$

$J_{N-1}(x_{N-1}) = 0 \quad \text{αν } x_{N-1} < -1$

$$J_{N-2}(0) = \max\{P_d J_{N-1}(0) + (1-P_d) J_{N-1}(-1), P_\omega J_{N-1}(1) + (1-P_\omega) J_{N-1}(-1)\}$$

$$= \max\{P_d P_\omega + (1-P_d) P_\omega^2, P_\omega (P_\omega + (P_\omega + P_d)(1-P_\omega)\}$$
$$= P_\omega (P_\omega + (P_\omega + P_d)(1-P_\omega)) \quad \boxed{\text{Επιλέξω το B}}$$

Στρατηγική: ΟΤΑΝ ΕΧΩ ΙΣΟΠΑΛΙΑ : B

ΚΕΡΔΙΖΩ ΚΑΙ ΕΠΕΙΔΗ ΕΙΝΑΙ ΜΠΡΟΣΤΑ ΣΤΟ ΣΚΟΡ : A

∎